

Cours 17

Rappel

A : anneau unitaire

$$\left. \begin{array}{l} M \in {}_A \text{Mod} \\ N \in \text{Mod}_A \end{array} \right\} \rightsquigarrow N \otimes_A M \in \text{Ab}$$

Variantes

1) Construction

$$\left. \begin{array}{l} M \in {}_A \text{Mod}_C \\ N \in {}_B \text{Mod}_A \end{array} \right\} \text{ alors } N \otimes_A M \in {}_B \text{Mod}_C$$

Preuve: on définit

$$\begin{aligned} B \times (N \otimes_A M)_C &\longrightarrow N \otimes_A M \\ \left(b, \sum_{i=1}^r n_i \otimes m_i, c \right) &\longmapsto \sum_{i=1}^r (b n_i) \otimes (m_i c) \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^r \parallel [n_i, m_i]$$

Pb: Il est difficile de vérifier que $\otimes$ est bien définie

(on utilise la construction explicite de $\otimes_A$)

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } (b, n a_1 \otimes m_1 + n \otimes a_2 m_2, c) = (b, n \otimes (a_1 m_1 + a_2 m_2), c) \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad b n a_1 \otimes m_1 c + b n \otimes a_2 m_2 c \stackrel{?}{=} b n \otimes (a_1 m_1 + a_2 m_2) c \end{array} \right)$$

On fait donc autrement : On utilise la propriété universelle.

$$\forall b \in B, \forall c \in C$$

On considère l'application A -bilineaire suivante :

$$\begin{aligned} \psi_{b,c} : N \times M &\longrightarrow N \otimes_A M \\ (n, m) &\longmapsto bn \otimes mc \end{aligned}$$

(il va représenter $n \otimes m$)

On vérifie (facilement) que $\psi_{b,c}$ est A -bilineaire

(Exo) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ lin. en } n \\ \bullet \text{ lin. en } m \\ \bullet (na, m) \longmapsto bna \otimes mc, \text{ dans } N \otimes_A M \\ \bullet (n, am) \longmapsto bn \otimes amc \end{array} \right.$

Par la prop. univ., on a unique morphisme de graph

$$\varphi_{b,c} : N \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M$$

q

$$\begin{array}{ccc} N \times M & \xrightarrow{f} & N \otimes_A M \\ & \searrow \psi_{b,c} & \downarrow \varphi_{b,c} \\ & & N \otimes_A M \end{array} \quad \text{!E}$$

$$\begin{array}{ccc} (n, m) & \longmapsto & n \otimes m \\ & \searrow \psi_{b,c} & \downarrow \varphi_{b,c} \\ & & bn \otimes mc \end{array}$$

Donc $\varphi_{b,c}(n \otimes m) = bn \otimes mc \quad \forall n \in N, m \in M.$

et plus généralement par linéarité:

$$\varphi_{b,c}\left(\sum_{i=1}^r n_i \otimes m_i\right) = \sum_{i=1}^r bn_i \otimes m_i c \quad (*)$$

(Exo) Vérifier que $\varphi_{b,c} : N \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M \Big|_{b \in B, c \in C}$

minist $N \otimes_A M$ d'une structure de $B \text{ Mod } C =$

eg. $b_1 \cdot (b_2 \cdot \sum_{i=1}^r n_i \otimes m_i) \stackrel{(*)}{=} (b_1 b_2) \cdot \left(\sum_{i=1}^r n_i \otimes m_i\right) \stackrel{(*)}{=} b_1 \left(\sum_{i=1}^r b_2 n_i \otimes m_i\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^r b_1 (b_2 n_i) \otimes m_i = \sum_{i=1}^r (b_1 b_2) n_i \otimes m_i.$ $\square$

2) $M \in {}_A \text{Mod } C, N \in {}_A \text{Mod } B$

$\text{Hom}_A({}_A M, {}_A N) \in {}_C \text{Mod } B$

Construction :

$$C \times \text{Hom}_A(M, N) \times B \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N).$$

$$(c, f, b) \longmapsto (cfb): M \longrightarrow N$$

$$m \longmapsto f(mc)b$$

Exo : Vérifier que ceci donne une str. de ${}_C\text{Mod}_B$ sur le group abélien $\text{Hom}_A(M, N)$;

$$\left(\begin{array}{l} \text{e.g. } (c_1 \cdot c_2) \cdot f(m) \stackrel{?}{=} (c_1 \cdot (c_2 \cdot f))(m) \quad \forall m \in M \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ f(m \cdot (c_1 \cdot c_2)) \qquad (c_2 \cdot f)(mc_1) \\ \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \qquad \qquad \qquad f((mc_1) \cdot c_2) \end{array} \right)$$

Isomorphisme de Cartan (Adjoint " $(\otimes, \text{Hom})$ ")

Thm Soient A, B, C, D des anneaux.

Soient $M \in {}_B\text{Mod}_A$
 $N \in {}_A\text{Mod}_C$
 $L \in {}_B\text{Mod}_D$

Alors on a un isomorphisme canonique de ${}_C\text{Mod}_D$:

$$\text{Hom}_B({}_B M_A \otimes_A {}_A N_C, {}_B L_D) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A({}_A N_C, \text{Hom}_B({}_B M_A, {}_B L_D)).$$

Preuve :

On construit :

$$\textcircled{1} \Psi : \text{Hom}_B(M \otimes_A N, L) \longrightarrow \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, L))$$

$$f \longmapsto \Psi(f) = N \longrightarrow \text{Hom}_B(M, L)$$

$$n \longmapsto \begin{pmatrix} M \longrightarrow L \\ m \longmapsto f(m \otimes n) \end{pmatrix}$$

C'est bien-défini : (EXO)

- $m \mapsto f(m \otimes n)$ est un morphisme de B -Mod :

$$f(bm \otimes n) \stackrel{\checkmark}{=} b \cdot f(m \otimes n)$$

$\parallel$ f est B -lin.

$$f(b \cdot (m \otimes n))$$

$\parallel \leftarrow$ rappel de str. de B -Mod sur $M \otimes_A N$

$$f(bm \otimes n)$$

- $\Psi(f)$ est un morph. de A -Mod :

$$a \cdot (\Psi(f)(n)) \stackrel{\checkmark}{=} \Psi(f)(an)$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$(m \mapsto (\Psi(f)(n))(m a)) \qquad (m \mapsto f(m \otimes an))$$

$$\parallel$$

$$f(ma \otimes n)$$

• Ψ est un morphisme de ${}_{\mathbb{C}}\text{Mod}_{\mathbb{D}}$.

(2) On construit un morphisme de ${}_{\mathbb{C}}\text{Mod}_{\mathbb{D}}$:

$$\underline{\Phi} : \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, L)) \longrightarrow \text{Hom}_B(M \otimes_A N, L)$$

$$f \longmapsto \underline{\Phi}(f) : M \otimes N \longrightarrow L$$

$$\sum_i m_i \otimes n_i \longmapsto \sum_i (f(n_i))(m_i)$$

Pb : c'est compliqué de vérifier que $\underline{\Phi}(f)$ est bien définie !

On utilise la propriété universelle :

On considère l'application A -bilineaire suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(f) : M \times N &\longrightarrow L \\ (m, n) &\longmapsto f(n)(m) \end{aligned}$$

• (Exo) Vérifier que $\widetilde{\Phi}(f)$ est bien A -bilineaire :

• linéaire en n

• linéaire en m

$$\begin{aligned} (ma, n) &\longmapsto f(n)(ma) = f(n)(ma) \\ (m, an) &\longmapsto f(an)(m) \stackrel{?}{=} a \cdot f(n)(m) \end{aligned}$$

$\parallel \longleftarrow$ rappel de la str. de ${}_{\mathbb{C}}\text{Mod}$ sur Hom
 f est A -lin. $\underbrace{f(n)}_{\in \text{Hom}_B(M, L)}$

Par la propriété universelle :

$$(m, n) \mapsto m \otimes n \quad M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

$$\exists! \underline{\Phi}(f)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow \Phi(f) & \searrow \\ f(n)(m) & \Phi(f) & \end{array}$$

Par la construction

$$\Phi(f)(m \otimes n) = (f(n))(m)$$

Plus généralement, par linéarité

$$\Phi(f)\left(\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^r f(n_i)(m_i)$$

- $\Phi(f)$ est B -linéaire :

$$(Exo) \quad \Phi(f)\left(b \cdot \left(\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i\right)\right) \stackrel{?}{=} b \cdot \Phi(f)\left(\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i\right)$$

- Φ est un isomorphisme de $C \text{ Mod } D$.

(Exo)

- $\Phi \circ \Phi = \text{id}$, $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ (Exo)

□

Quelques propriétés de $\otimes$

1) Structure monoidal "Associativité catégorique"

$$\text{isom canonique} : (L \otimes_A M) \otimes_B N \xrightarrow{\phi_{L,M,N}} L \otimes_A (M \otimes_B N)$$

Rk : $\phi_{L,M,N}$ vérifie certain cohérence supplémentaire.

Axiome de pentagone :

$$\begin{array}{ccc}
 (L \otimes_A M) \otimes_B N \otimes_C T & \xrightarrow{\sim} & (L \otimes_A M) \otimes_B (N \otimes_C T) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \text{SI } \phi_{L,M,N \otimes T} \\
 (L \otimes_A (M \otimes_B N)) \otimes_C T & & \\
 \downarrow \text{SI} & & \\
 L \otimes_A ((M \otimes_B N) \otimes_C T) & \xrightarrow{\sim} & L \otimes_A (M \otimes_B (N \otimes_C T))
 \end{array}$$

Exo : Construire $\phi_{L,M,N}$.

(utilise propriété universelle
ou l'Isom de Cartan)

2) (Monoidal symétrique) "commutativité catégorique".
Si de plus que A est un anneau commutatif.

Alors $\forall M, N \in A\text{-Mod}$, on a un isom. canonique de $A\text{-Mod}_A$.

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M$$

$\gamma_{M,N}$

Rk : $\gamma_{M,N}$ vérifie une cohérence supérieure (faisant intervenir $\phi_{M,N}$ etc).

3) Distributivité supérieure :
 $\exists$ Isom. canoniques de gp abélien (ou ${}_{\mathbb{C}}\text{Mod}_{\mathbb{D}}$)

$$(M_1 \oplus_c M_2) \otimes_A N_D \cong {}_c M_1 \otimes_A N_D \oplus {}_c M_2 \otimes_A N_D.$$

$${}_C M \otimes_A (N_1 \oplus N_2)_D \cong {}_C M \otimes_A N_{1D} \oplus {}_C M \otimes_A N_{2D}.$$

Examples

$$0 \otimes_A M \cong 0 \quad ; \quad M \otimes_A 0 \cong 0$$

$$(A^{\oplus r}) \otimes_A M \stackrel{\cong}{=} \underbrace{A \otimes_A M \oplus \dots \oplus A \otimes_A M}_{r \text{ fcs}} \cong M^{\oplus r}$$

• $A \otimes_A M \cong M$; $M \otimes_A A \cong M$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 isom de $A\text{Mod}$ isom de Mod_A .

Prereq.:-

On considère

$$f: A \times M \xrightarrow{\cdot} M$$

$$(a, m) \mapsto am$$

f est bien A -bilinéaire.

$\Rightarrow$ en a un morphisme de A Mod

$$A \otimes M \xrightarrow{f} M$$

$$a \otimes m \mapsto am$$

On considère $g: M \rightarrow A \otimes_A M$
 $m \mapsto 1 \otimes m$

facile à vérifier que $g \circ f = \text{id}$; $f \circ g = \text{id}$:

$$g(f(\sum a_i \otimes m_i)) = g(\sum_i a_i m_i) = \sum_i 1 \otimes a_i m_i = \sum_i a_i \otimes m_i$$

• $A =$ anneau commutatif.
 $I \triangleleft A, J \triangleleft A$ idéaux

$$A/I \otimes_A A/J \cong A/I+J \quad (\otimes)$$

où $I+J$ est idéal engendré par
 $\{i+j \mid i \in I, j \in J\}$.

e.g. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

avec $d = \text{pgcd}(n, m)$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rappel : } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \\ \text{Si } \text{pgcd}(n, m) = 1 \end{array} \right)$$